Izbrane geometrijske izpitne naloge iz EM 2008/09, 2009/10, 2010/11

Boris Lavrič

1. Naj bo AOB poljuben kot v nevtralni ravninski geometriji. Ugotovi pravilnost naslednjih izjav v odvisnosti od aksioma o vzporednici (torej v evklidski in v hiperbolični ravnini):

   (a) Za vsako točko T znotraj kota AOB obstaja premica skozi T, ki seka oba kraka kota AOB in ne vsebuje točke O;

   (b) Za vsako točko T znotraj kota AOB vsaka premica skozi T seka vsaj enega od krakov kota AOB.

2. Označimo pravokotni projekciji oglišča C trikotnika ABC na kotni simetrali notranjih kotov ob oglišči A in B z D in E. Dokaži, da je $DE \parallel AB$ in izrazi dolžino daljice DE z dolžinami stranic trikotnika ABC.

3. (a) Dokaži, da je kotna simetrala trikotnika krajša od geometrične sredine dolžin sosednih stranic in poišči supremum vseh dolžin simetral s_γ pri danih sosednih stranicah a in b.

   (b) Poišči neskončno paroma nepodobnih trikotnikov, pri katerih so dolžine stranic a, b in c in kotne simetrale s_γ cela števila.

4. Hiperbolična ravnina je dana s Poincaréjevim diskom $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Premici p in q te ravnine se sekata v točki $(1/5, 2/5)$, pri čemer je p pravokotna na premico $r = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$, q pa vsebuje točko $(2/5, 1/5)$. Poišči sečišče med p in r ter kot med p in q.

5. Višinska točka V ostrokotnega trikotnika ABC razpolavlja višino AA_1, višino BB_1 pa deli v razmerju $2 : 1$. Poišči razmerje, v katerem V deli višino CC_1 tega trikotnika in izračunaj kot ACB.

6. Naj bosta i_1 in i_2 inverziji razširjene ravnine glede na krožnici K_1 in K_2 s te ravnine.

   Dokaži, da je $i_1 = i_2$ samo takrat, kadar je $K_1 = K_2$. Pri katerih pogojih za K_1 in K_2 sta i_1 in i_2 med sabo inverzni preslikavi in pri katerih pogojih i_1 in i_2 komutirata med sabo?

7. V ravnini so dane nekolinearne točke K, L in M. Konstruiraj trikotnik ABC v naslednjih dveh primerih:

   (a) K, L in M so nožišča višin AK, BL in CM trikotnika ABC;

   (b) K, L in M so dotikališča včrtanega kroga s stranicami BC, CA in AB.

8. V hiperbolični ravnini, predstavljeni s Poincaréjevim modelom $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, je dan hiperbolični trikotnik ABC s podatki $A(0, 17)$, $B(0, 5)$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \pi/4$.

   Poišči oglišče $C(x, y)$, $x > 0$, zrcalno sliko p premice AB preko premice BC in zrcalno sliko D točke C preko premice p.

9. Naj bosta CD in CE zaporedoma višina in kotna simetrala pravokotnega trikotnika ABC s hipotenuzo AB. Poleg tega naj bosta DG in DF zaporedoma kotni simetrali trikotnikov BCD in ADC. Dokaži, da so C, F, E in G oglišča kvadrata.

10. V ravnini sta dani krožnici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Preslikava f naj bo kompozitum inverzij preko teh dveh krožnic, $f = i_{\mathcal{A}}\, i_{\mathcal{B}}$. Katere premice f preslika v premice? Za natančen opis množice vseh iskanih premic naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v $\mathbb{R}^2$ dani z enačbama $(x+1)^2+y^2 = 1$ in $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

11. V hiperbolični ravnini, predstavljeni s Poincarejevim modelom $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, so dane točke $A(0,1)$, $B(0,3)$ in $C(2,1)$. Dokaži, da ima hiperbolični trikotnik ABC višinsko točko in izračunaj njeni koordinati.

12. V polkrog sta včrtani krožnici, ki se dotikata med sabo v točki T. Dokaži, da vsa možna dotikališča T ležijo na krožnici. Koliko meri polmer te krožnice, če je premer polkroga enak 2?

    Nasvet: Za dokaz prvega dela naloge uporabi inverzijo, za reševanje drugega dela pa lahko privzameš, da je prvi del rešen.

13. V trikotniku ABC je notranji kot pri A za 90^o večji od notranjega kota pri B. Simetrala notranjega kota pri C seka AB v D, simetrala zunanjega kota pri C pa nosilko AB v E.

    (a) Dokaži, da je $\overline{CD} = \overline{CE}$.

    (b) Koliko merita AB in CD, če je $a = \overline{BC} = 4$ in $b = \overline{AC} = 3$?

14. Od oglišč trikotnika ABC različne točke X, Y, Z ležijo zaporedoma na stranicah AB, BC in CA. Naj bo p premica skozi A, ki je vzporedna premici BC, D sečišče med p in XY, E pa sečišče med YZ in p. Dokaži, da je $\overline{AD} = \overline{AE}$ natanko takrat, kadar se premice CX, AY in BZ sekajo v eni točki.

15. V hiperbolični ravnini, predstavljeni s Poincarejevo polravnino $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ sta dani točki $A = (0, 9)$ in $B = (0, 4)$. Poišči množico vseh točk C te ravnine, za katere je hiperbolični trikotnik ABC enakokrak z osnovnico AB in krakoma AC, BC.

16. V tetivnem štirikotniku $ABCD$ se diagonali sekata v točki S. Točke K, L, M in N so nožišča pravokotnic, ki jih potegnemo iz S zaporedoma na stranice AB, BC, CD in DA. Dokaži, da je štirikotnik $KLMN$ tangenten in ugotovi, kje leži središče vanj včrtane krožnice?

17. V trikotnik ABC z dolžinami stranic $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ včrtaj enako veliki krožnici K_1 in K_2, tako da se dotikata stranice AB in med sabo, K_1 se dotika tudi stranice AC, K_2 pa stranice BC. Natančno opiši in utemelji konstrukcijo ter izračunaj polmer obeh krožnic?